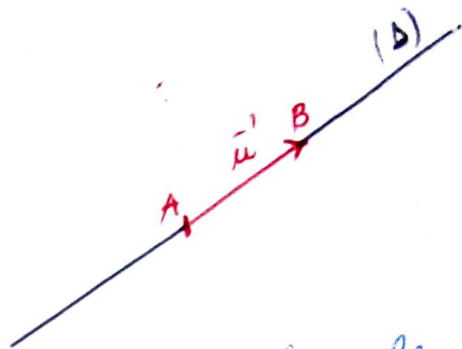


Chapitre : Calcul vectoriel

1- Définition

un vecteur est une grandeur caractérisée par : une norme, une direction et un sens.



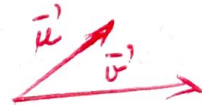
1-1. Repères de l'espace

a) Indépendance linéaires

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et a, b, c 3 réels. Si la seule combinaison linéaire $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ est celle pour laquelle pour laquelle $a=b=c=0$, on dit que les 3 vecteurs sont **linéairement indépendants** car ils constituent une famille libre de vecteurs.

b. base d'un espace vectoriel

On appelle famille génératrice d'un ensemble de vecteurs (espace vectoriel), un ensemble de vecteurs / éléments de l'espace vectoriel puisse s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire. Une famille de vecteurs à la fois libre et génératrice est une base de l'espace vectoriel.

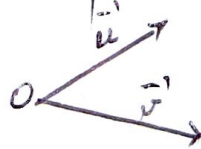


$(\vec{u} \text{ et } \vec{v})$ est une base du plan car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et ils constituent une famille génératrice.

Étant donné une base de l'espace, il suffit juste de

choisir un point origine pour obtenir un repère.

Par ex : $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan avec :



1-2. Barycentre de points pondérés.

Soit $M_1, M_2, \dots, M_n$ des points affectés des coefficients réels $c_1, c_2, \dots, c_n$ avec $c = \sum_{k=1}^n c_k \neq 0$. On appelle barycentre de ces points M_k pondérés par les poids c_k , le point G unique définie par :

$$c \vec{OG} = \sum_{k=1}^n c_k \vec{OM}_k, \quad + G.$$

si G est pris comme le point particulier G cherché, la relation devient :

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^n c_k \vec{GM}_k$$

Remarque : si les points ont le même poids, le barycentre est appelé l'isobarycentre des points.

1-3. Le produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs, et φ l'angle formé entre eux.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos \varphi \quad \text{-- } \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ est un réel.}$$

Propriété : - Le produit scalaire est commutatif i.e. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- " " " " bilinéaire i.e. $\vec{u} \cdot (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = a\vec{u} \cdot \vec{v}_1 + b\vec{u} \cdot \vec{v}_2$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}) \text{ ou } \vec{v} \perp \vec{u}$

- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

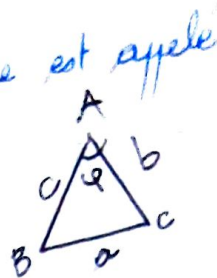
1-3-1. Expression du produit scalaire en coordonnées orthogonales

Soit les coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

1-3-2. Espace Euclidien

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire est appelé l'espace euclidien de dimension 3.



Exemple : Relation dans un triangle

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$= \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$(\vec{BC})^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2$$

~~$$\vec{BC} \cdot \vec{BC} = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|\cos \varphi$$~~

$$\vec{BC} \cdot \vec{BC} = \vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|\cos \varphi$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\varphi)} \quad \text{avec } \varphi = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$$

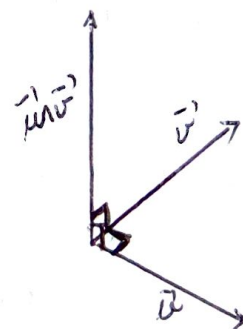
1-4. Produit vectoriel

Etant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit vectoriel leur fait correspondre un vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit directe

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \varphi \quad \text{avec } \varphi = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}}$$

Remarque

1-4-1 Propriété du produit vectoriel



Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, a et $b \in \mathbb{R}$

$$- (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \wedge \vec{v} = a\vec{u}_1 \wedge \vec{v} + b\vec{u}_2 \wedge \vec{v}$$

$$- \vec{u} \wedge (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = a\vec{u} \wedge \vec{v}_1 + b\vec{u} \wedge \vec{v}_2$$

$$- \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$- \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

Remarque : la norme $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Exemple : $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u} - \vec{v} \wedge \vec{v}$

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = -2\vec{v} \wedge \vec{u}}$$

1-4-2. Expression des coordonnées du produit vectoriel dans la base orthonormée

Si (u_1, u_2, u_3) sont les coordonnées de $\vec{u}$ et (v_1, v_2, v_3) sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on a :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3}$$

Exemple = Calculer l'aire du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans une base ON.

Solution : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (3 \cdot 0 - 0 \cdot 2) \vec{e}_1 + (0 \cdot (-1) - 3 \cdot 3) \vec{e}_2 + (3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) \vec{e}_3$
 $= 0 \vec{e}_1 - 9 \vec{e}_2 + 3 \vec{e}_3$

L'aire du parallélogramme est $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{0 + 81 + 9} = \sqrt{90}$

Double produit vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{v}$

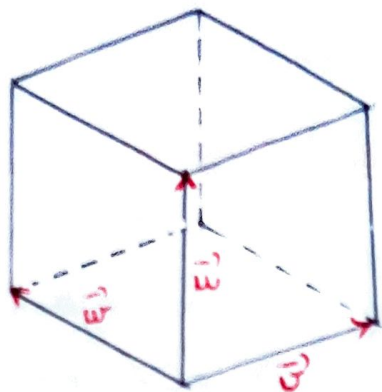
1-5 Produit mixte de trois vecteurs

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 3 vecteurs. Le produit mixte de ses 3 vecteurs pris dans cet ordre est noté et défini par :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

a. Interpretation géométrique

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 3 vecteurs dans l'espace, le volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs est égale à la valeur absolue du produit mixte de ses 3 vecteurs.



le volume $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$

b. Expression à l'aide de coordonnées orthogonales

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - v_1 \begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} + w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) - v_1(u_2 w_3 - u_3 w_2) + w_1(u_2 v_3 - u_3 v_2)$$

6. Une fonction vectorielle d'une variable réelle

Définition : Elle fait correspondre un vecteur à une variable réelle

Exemple : $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $x \mapsto (x^2 - 4, 2x, 1)$

a. Dérivée d'une fonction vectorielle

Soit une fonction vectorielle $\vec{v}$, u , $u+h$ $\in$ l'ensemble de définition.

si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(x_0+h) - \vec{v}(x_0)}{h}$ existe, on dit que $\vec{v}$ est dérivable en x_0

Dans ce cas cette limite est un vecteur $\vec{v}'(x_0)$ que l'on appelle le vecteur dérivé de v au point x_0

b. Dérivée d'un produit scalaire de fonction vectorielle

si A et B sont des fonctions vectorielles d'une variable réelle t , leur produit scalaire est une fonction réelle de cette variable réelle dont la dérivée si elle existe est

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})(t+h) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(t)}{h}$$

Propriété = Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux fonctions vectorielles,

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})'(t) = \vec{A}'(t) \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \vec{B}'(t)$$

Exemple = Soit $\vec{a}(t)$ une fonction vectorielle. Montrons que : $\frac{d\|\vec{a}\|}{dt} = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

$$\text{Solution : } \|\vec{a}\| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\|\vec{a}\|}{dt} &= \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \vec{a})^{-\frac{1}{2}} \times (\vec{a}' \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a}') \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{a})^{-\frac{1}{2}} \times \vec{a}' \cdot \vec{a} \\ &= \frac{\vec{a}' \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{a}' \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \end{aligned}$$

c. Dérivée d'un produit vectoriel de fonctions vectorielles

Soit $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux fonctions vectorielles, on a :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})'(t) = \vec{A}'(t) \wedge \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \wedge \vec{B}'(t)$$

~~R~~ Du fait que le produit vectoriel n'est pas commutative, il faut préserver l'ordre des facteurs.

Chapitre 2 : Calcul différentiel

2.1. Fonction de plusieurs variables réelles

Définition

Se sont des applications d'un espace vectoriel de dimension supérieur à 1 (par ex $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) vers $\mathbb{R}$ pour les fonctions scalaires, $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ pour les fonctions vectorielles.

Ex : une certaine quantité de gaz est enfermée dans une assiette de volume variable. - la pression est fonction de la température et du volume. $P = f(v, T)$.

Il s'agit ici d'une fonction scalaire de deux variables.

2.2. Dérivées partielles.

Définition : Soit f une fonction scalaire de n variables réelles

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v, w) \mapsto f(u, v, w)$$

La dérivée partielle de la fonction f par rapport à u est

$\frac{\partial f}{\partial u}$ ou f'_u . Elle se calcule en fixant les valeurs variables v, w et en dérivant la fonction de la seule

variable u ainsi obtenue.

$$Ex = f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

avec $(x, y) \neq (0, 0)$.

Dérivée partielle d'ordre supérieur.

En faisant les dérivées partielles de la dérivée partielle, on obtient les dérivées partielles d'ordre supérieur.

* Dérivée partielle seconde

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \text{ notée } \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \text{ ou } f''_{uu}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \text{ notée } \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \text{ ou } f''_{uv}$$

* Dérivée partielle d'ordre 3

$$f'''_{u^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right)$$

$$f'''_{u^2 v} = \frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right)$$

Théorème (Théorème de Schwarz) : une fonction f de n variable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$.

si $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ est continue sur D alors $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ sur D

2-3. Différentielle d'une fonction.

a) Différentielle d'une fonction d'une variable réelle

Def Soit f une fonction d'une variable réelle, f est différentiable au point $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe une fonction linéaire L telle que $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ (1).

Lorsqu'elle existe, la fonction L est unique et s'appelle la différentielle de f au point x_0

Propriété : Lorsque la fonction L existe, alors

$$\forall h \in \mathbb{R}, L(h) = f'(x_0) \times h$$

Preuve : Comme L est linéaire alors $L(h) = ah$ avec $a \in \mathbb{R}$ avec (1),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(h)}{h} = a$$

$\Rightarrow f'(x_0) = a$ donc $L(h) = f'(x_0) \times h \quad \forall h \in \mathbb{R}$

Notation : La différentielle F de f à x_0 est noté df .
On a donc $df(h) = f'(x_0) \times h$, $h \in \mathbb{R}$ (2)

La relation (1) peut s'écrire :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = df(h) + h(\varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

un cas particulier de fonction différentiable est celui de la fonction linéaire identique $I : x \mapsto x$.

La relation (2) conduit à $dI(h) = h$.

Dans ce contexte, on préfère désigner cette fonction particulière par x , i.e. $dx(h) = h$.

Ceci permet de remplacer dans l'égalité 2 h par $dx(h)$:

$$df(h) = f'(x_0) dx(h) \text{ ou } df = f'(x_0) dx$$

Exemple :

- $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$: $df = a dx$, $df(h) = ah \quad \forall h \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \sin(x)$: $df = \cos x dx$, $df(h) = \cos x h \quad \forall h \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

b. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables réelles.

Considérons f une fonction de 3 variables réelles, f est différentiable en $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, s'il existe une fonction linéaire L telle :

$$\frac{f(\vec{P}_0 + \vec{P}) - f(\vec{P}_0) - L(\vec{P})}{\|\vec{P}\|} = \varepsilon(\vec{P}) \quad (3)$$

$$\text{avec } \lim_{\|\vec{P}\| \rightarrow 0} \varepsilon(\vec{P}) = 0 \quad \forall \vec{P} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$$

La fonction L est appelée différentiel de f au point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et on la note df .

Propriétés : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^3$)
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$

La différentielle de f en $\vec{P}_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{df(\vec{P}) = \frac{\partial f(\vec{P}_0)}{\partial x} u + \frac{\partial f(\vec{P}_0)}{\partial y} v + \frac{\partial f(\vec{P}_0)}{\partial z} w}$$

$\forall \vec{P}(u, v, w)$

Remarque : La relation (3) peut s'écrire

$$f(\vec{P}_0 + \vec{P}) = f(\vec{P}_0) + df(\vec{P}) + \|\vec{P}\| \varepsilon(\vec{P})$$

avec $\varepsilon(\vec{P}) \rightarrow 0$
 $\|\vec{P}\| \rightarrow 0$

Notation : Comme dans le cas d'une fonction d'une variable on considère des fonctions différentiables particulières désignées x, y, z qui font correspondre respectivement à x, y, z les valeurs x, y, z . Les différentielles de ces 3 fonctions, font correspondre à $\vec{P} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ respectivement u, v, w .

Par exemple $d\mathbf{x}(\vec{P}) = u$.
 A l'aide de ses fonctions, on écrit les valeurs par la différentielle.

$$df(\vec{P}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{P}) d\mathbf{x}(\vec{P}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{P}) d\mathbf{y}(\vec{P}) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{P}) d\mathbf{z}(\vec{P})$$

Autrement dit : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

Exemple : une particule en mouvement parabolique lancée avec une vitesse v faisant un angle α avec l'horizontal atteint un plan horizontal ayant la cote du point de lancement la distance $f(v, \alpha, g) = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Montrons la différentielle de f :

solution : $df = \frac{2v \sin 2\alpha}{g} dv + \frac{2v^2 \cos 2\alpha}{g} d\alpha - \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g^2} dg$

Propriété : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g , deux fonctions, si f et g sont différentiables,

$$\bullet d(f+g) = df + dg$$

$$\bullet d(df) = d^2 f$$

$$\bullet d(fg) = gdf + f dg$$

En particulier $d(f^n) = n f^{n-1} df$ et donc $d(\frac{1}{f}) = -\frac{df}{f^2}$ si $f(x) \neq 0 \forall x$.

$$\bullet d(f \circ \gamma) = (f'_x \circ \gamma) \gamma'_x dx + (f'_y \circ \gamma) \gamma'_y dy + (f'_z \circ \gamma) \gamma'_z dz$$

Exemple : déterminer la différentielle de r définie par

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Solution :

$$\text{on a : } d(r^2) = \frac{\partial r^2}{\partial x} dx + \frac{\partial r^2}{\partial y} dy + \frac{\partial r^2}{\partial z} dz$$

$$= 2x dx + 2y dy + 2z dz$$

$$\text{or } d(r^2) = 2r dr \text{ avec } r = \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ alors}$$

$$d(r^2) = 2r dr = 2x dx + 2y dy + 2z dz$$

$$\text{donc } dr = \frac{2(x dx + y dy + z dz)}{2r}$$

$$dr = \pm \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

C. Forme différentielles

$$f' \text{ s'écrit : } df = f'_x(x,y) dx + f'_y(x,y) dy$$

On peut considérer de façon plus générale $w = x dx + y dy$.
où x et y sont des fonctions quelconques de x et y . Un tel objet
s'appelle une forme différentielle.

Lorsqu'une forme différentielle est la différentielle d'une fonction
on dit que c'est une forme différentielle exacte ou totale.

Propriété : Les conditions pour que $w = A(x,y,z) dx +$

$$B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz \text{ soit}$$

une forme différentielle exacte sont :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$$

w étant définie dans un domaine simplement connexe.

Exemple : Considérons la forme différentielle suivante

$$w = y dx + x dy$$

Posons : $A(x, y) = y$, $B(x, y) = x$

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = 1 \text{ et } \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = 1 \text{ on a donc } \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

D'où w est une forme différentielle exacte i.e. w est la différentielle d'une fonction f . Ainsi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$. Ce qui entraîne que $f(x, y) = xy + g(y)$ avec g une fonction qui ne dépend que de y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + g'(y) = x$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Par conséquent $f(x, y) = xy + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercices -

Calculer la différentielles des fonctions suivantes

- $f(x) = \sqrt{x^2 \cos x} \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$

- $g(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}\right)$

Solution :

1 - $f(x) = \sqrt{x^2 \cos x}$

$$df = f'(x) dx$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 \cos x)'}{2\sqrt{x^2 \cos x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{2\sqrt{x^2 \cos x}}$$

$$df = \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{2\sqrt{x^2 \cos x}} \cdot dx$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$$

$$\text{et } h \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$$

$$df(h) = \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{2\sqrt{x^2 \cos x}} \cdot h$$

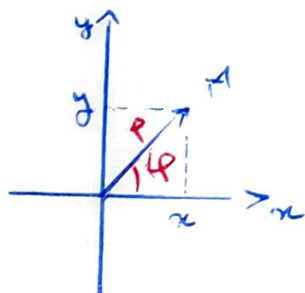
(4 II)

Chapitre 3: Système de coordonnées.

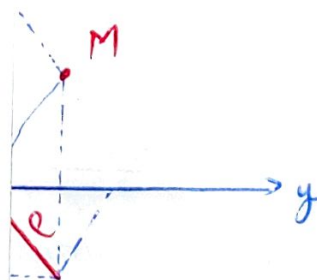
3.1. Repérage d'un point

Dans le plan, on peut repérer un point M l'aide des coordonnées cartésiennes : $M(x, y)$ ou à l'aide des coordonnées polaires : $M(\rho, \varphi)$ $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\rho > 0$

Dans l'espace, on peut repérer un



(ρ, φ, z)



(ρ, φ, θ) $\rho > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$

soit θ le

Chapitre 3: Système de coordonnées.

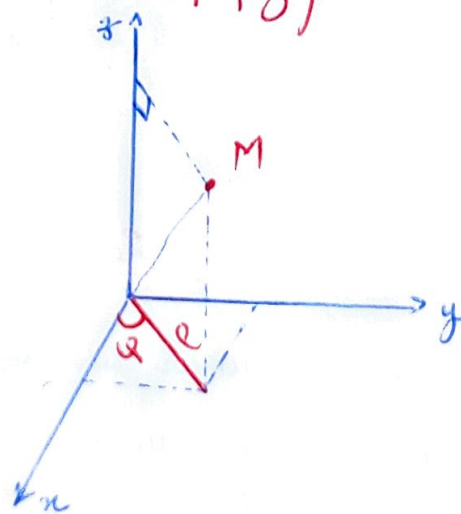
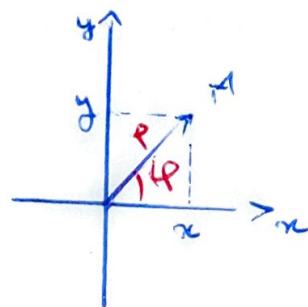
3.1. Repérage d'un point

Dans le plan, on peut repérer un point M l'aide des coordonnées cartésiennes : $M(x, y)$ ou à l'aide des coordonnées polaires : $M(\rho, \varphi)$ $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\rho > 0$

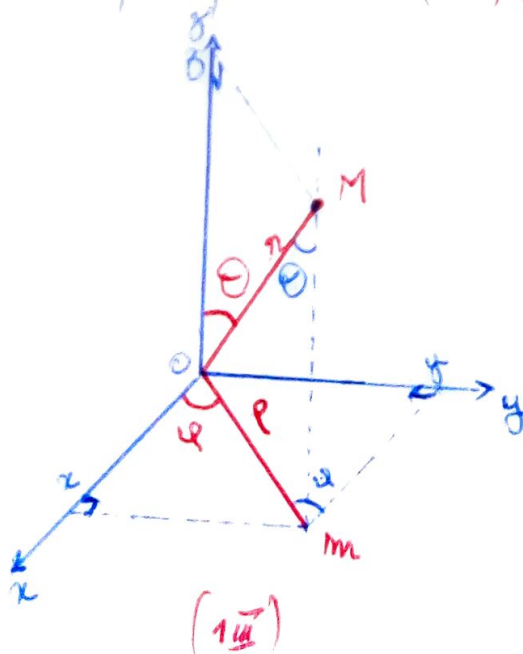
Dans l'espace, on peut repérer un point M à l'aide :

- Des coordonnées cartésiennes : $M(x, y, z)$
- Des coordonnées curvilignes :

* Les coordonnées cylindriques : $M(\rho, \varphi, z)$



* Coordonnées sphériques : $M(r, \theta, \varphi)$ $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$
 $0 \leq \theta < \pi$



$$x = r \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 ; \quad x^2 + y^2 = (r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta \sin \varphi)^2$$

$$= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

3-2- Repère local

Définition = pour un système de coordonnées orthogonales $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, le repère local au point M est $\{M, \vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ où

$$\vec{e}_u = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}}{N_u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}}{N_v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial w}}{N_w} \quad \text{avec}$$

$$N_u = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \right\|, \quad N_v = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\|, \quad N_w = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} \right\|$$

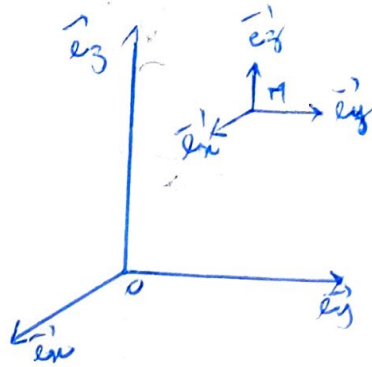
a) Repère local cartésien

En définissant le vecteur $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ comme les vecteurs directeurs des axes, on peut écrire :

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

avec $\vec{e}_x' = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x}$; $\vec{e}_y' = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y}$, $\vec{e}_z' = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z}$

$\vec{e}$ est le vecteur unitaire directeur tangente à la courbe de coordonnées x, y et z .



b - Repère local polaire.

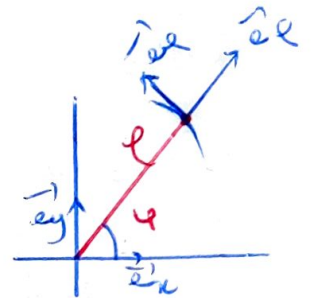
$\vec{e}_\varphi' = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}$ et $\vec{e}_\rho' = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}$

$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = \rho \cos \varphi \vec{e}_x + \rho \sin \varphi \vec{e}_y$

$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = \cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y$

$N_\varphi = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$

$\vec{e}_\varphi' = \cos \varphi \vec{e}_x - \sin \varphi \vec{e}_y$



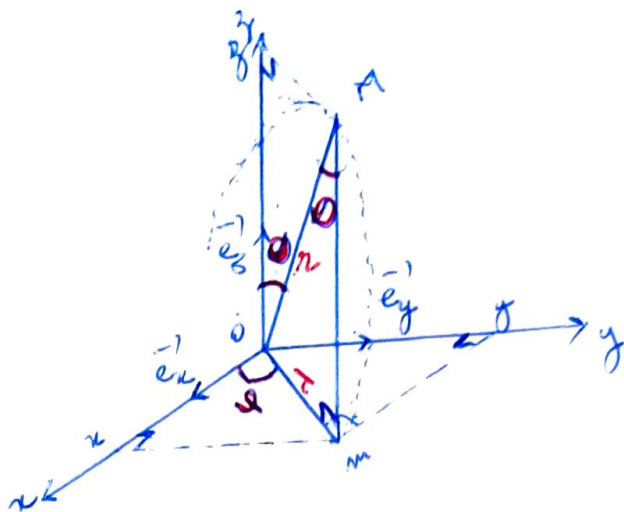
$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$

$N_\rho = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1$

$N_\varphi = \rho$

$\vec{e}_\rho' = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$

c) Repère local sphérique



$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\|}$$

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{OM} = (r \sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_x + (r \sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_y + (r \cos \theta) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_x + (\sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_y + (\cos \theta) \vec{e}_z$$

$$N_r = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \right\| = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta}$$

$$N_r = 1 \quad \text{donc} \quad \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} =$$

$$\boxed{\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_x + (\sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_y + (\cos \theta) \vec{e}_z}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\|}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi) \vec{e}_x + (r \cos \theta \sin \varphi) \vec{e}_y + (-r \sin \theta) \vec{e}_z$$

$$N_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{r^2} = r$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{r[(\cos \theta \cos \varphi) \vec{e}_x + (\cos \theta \sin \varphi) \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z]}{r}$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi) \vec{e}_x + (\cos \theta \sin \varphi) \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z}$$

$$\vec{e}_\varphi' = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\|}$$

$$\vec{OM} = (r \sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_x + (r \sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_x + (r \sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_y$$

$$N_\varphi = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}$$

$$= r \sin \theta$$

$$\vec{e}_\varphi' = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}}{N_\varphi} = \frac{(-r \sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_x + (r \sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_y}{r \sin \theta}$$

$$\boxed{\vec{e}_\varphi' = (-\sin \varphi) \vec{e}_x + (\cos \varphi) \vec{e}_y}$$

$(\vec{e}_r', \vec{e}_\theta', \vec{e}_\varphi')$ ainsi défini et pris dans l'ordre constituent une base orthonormée directe.

3.3. Déplacement élémentaire d'un point

On appelle déplacement élémentaire ou infinitésimal d'un point le vecteur décrit par ce point lorsque ses coordonnées subissent des variations arbitraires mais infinitésimales.

Si les coordonnées utilisées sont ~~x, y, z~~ u, v, w l'expression

dans la base locale du déplacement élémentaire résultant des variations du, dv, dw est la différentiel

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$$

(4.2)

Ainsi on a : $d\vec{OM} = N_u du \vec{e}_u + N_v dv \vec{e}_v + N_w dw \vec{e}_w$
en particulier :

En coordonnées cartésiennes : $d\vec{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$

" " cylindriques : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$

" " sphérique : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

Contrôle de Maths pour la Physique

Durée: 2h

Exercice 1. (2+4+3)=9pts

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs donnés dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Quelle relation doit-il exister entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour que l'on puisse trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$?
2. On suppose cette condition satisfaite. construire une base orthonormée directe à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et chercher les coordonnées de $\vec{x}$ dans cette base. Vérifier qu'il existe une infinité de solutions.
3. Exemple: $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Trouver le vecteur $\vec{x}$ orthogonal à $\vec{w}$ et tel que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$.

Exercice 2. (2+3+3+3)=11pts

On considère un point M d'un plan muni d'un repère cartésien orthonormé $\{o, \vec{e}_x, \vec{e}_y\}$. Il est repéré par ses coordonnées polaires ρ et φ .

1. Ecrire les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère local cartésien puis dans le repère local polaire.
2. Calculer $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$ et en déduire l'expression du déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.
3. Le point M décrivant une spirale logarithmique d'équation $\rho = ae^\varphi$, calculer $d\overrightarrow{OM}$.
4. Le point M se déplace avec une vitesse angulaire constante ($\theta = \omega t$, ω constante), écrire les composantes du vecteur vitesse $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ dans le repère local polaire.

Bonne inspiration

Rattrapage de mathématiques pour la physique

Durée : 01 heure 30 minutes

Exercice 1 (6 points=(1+1+(1+1+2))points)

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On donne les points $A(0; 3; 6)$, $B(2,5; 0; 3)$ et $C(0; 7; 0)$.

- 1) Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
- 2) Calculer en degrés l'angle $\widehat{BAC}$ à 10^{-2} près.
- 3) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par les points A, B et C.
 - 3.1) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$.
 - 3.2) Quelle est la distance d de l'origine du repère au plan $\mathcal{P}$?
 - 3.3) Quelles sont les coordonnées des points D et E, intersections respectives du plan $\mathcal{P}$ et des droites $(O, \vec{e}_3)$ et $(O, \vec{e}_1)$?

Exercice 2 (8 points =(2+2+2+2) points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les trois vecteurs liés $(A, \vec{u})$, $(B, \vec{v})$ et $(C, \vec{w})$ avec $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(3, 0, 2)$ et $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(1, -1, 0)$ et $\vec{w}(-2, -3, 1)$.

- 1) Calculer les coordonnées de l'isobarycentre G des trois points.
- 2) Calculer les moments par rapport à O des trois vecteurs liés.
- 3) Calculer la résultante générale $\vec{R}$ des trois vecteurs et le moment résultant en O.
- 4) Soit le vecteur $\vec{a}(1+m, -1, 0)$. Trouver m tel que les deux droites de support $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{a})$ soient concourantes et calculer les coordonnées du point d'intersection I .

Exercice 3 (3 points)

Soit une fonction vectorielle $\vec{u}(\alpha, \beta)$ de norme constante; montrer que, quels que soient α et β , les dérivées $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta}$ sont orthogonales à $\vec{u}$.

Exercice 4 (3 points)

La loi des gaz relative à une masse fixée m d'un gaz parfait à température absolue T , pression P et volume V s'écrit $PV = mRT$, où R est la constante du gaz. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$.

Examen de mathématiques pour la physique

Durée : 2 heures

Exercice 1

Choisissez la ou les bonnes réponses.

1) La différentielle de $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ est

a) $\frac{y^3 dx + x^3 dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $\frac{y^3 dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$

c) $\frac{y dx + x dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$

2) $\omega = 2xy dx + x^2 dy$

a) est une forme différentielle

b) est une forme différentielle totale

c) n'est pas une forme différentielle totale.

Exercice 2Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs donnés dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.1) Quelle relation doit-il exister entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour que l'on puisse trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$?2) On suppose cette condition satisfaite. Construire une base orthonormée directe à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et chercher les coordonnées de $\vec{x}$ dans cette base. Vérifier qu'il existe une infinité de solutions.

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}.$$

Exercice 3

Déterminer la position du barycentre du système Terre-Lune. Le rapport des masses est de 81 et la distance moyenne entre la Terre et la Lune est de 384 400 km. À quelle distance se trouve-t-il du centre de la Terre (rayon de la Terre = 6273 km) ?

Exercice 4Soit la forme différentielle $\omega = \frac{xdy - ydx}{xy}$ définie sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$. La forme différentielle ω est-elle exacte ? Si oui, trouver la fonction f dont ω est la différentielle.**Exercice 5**Soit T le tétraèdre formé par les 4 plans d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$.1) Représenter le tétraèdre T .

2) Déterminer son volume.

3) Calculer $\iiint_T z dx dy dz$.

Épreuve de mathématiques pour la physique

Date : 26/10/ 2016

Durée : 02 heures

Exercice 1 (3 points).

Choisissez la ou les bonne(s) réponse(s). On ne demande pas de justifier mais chaque bonne réponse donne droit à 1 point, chaque mauvaise réponse donne droit à -1 point, l'absence de réponse donne droit 0 point.

1) La différentielle de $\ln|ax|$ est

a) $\frac{a}{x} dx$.

b) $\frac{1}{x} dx$.

c) dx .

2) Dans $\mathbb{R}^3$, l'expression du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ est

a) toujours vraie

b) vraie si les axes sont orthogonaux deux à deux.

★ c) vraie si la base est orthonormée

3) Les deux notations $\text{grad} f$ et $\vec{\nabla} f$

a) n'ont aucun rapport entre elles.

b) expriment la divergence de f .

c) sont équivalentes.

Exercice 2 (5 points)

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, quelle est la distance d'un point $M(x, y)$ à la droite

(Δ) dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et passant par le point $P(x_0, y_0)$? Faire un dessin.

2) On considère $f(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et la parabole ($\mathcal{P}$) d'équation $y = x^2 + 2$.

Déterminer les coordonnées du point de ($\mathcal{P}$) le plus proche de (Δ). Faire un dessin.

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = (x + y)e^{xy}$.

1) Calculer la différentielle de φ .

2) On pose $X = x + y$ et $Y = xy$. Exprimer $d\varphi$ en fonction de dX et dY puis retrouver le résultat précédent.

Exercice 4 (5 points)

On se place dans un repère cartésien orthonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ puis on considère le champ de vecteur $\vec{V}(M)$ défini par

$$V_1 = \varphi(x, y, z), \quad V_2 = x^2 - 2xyz + \frac{1}{3}z^3, \quad V_3 = -xy^2 + yz^2.$$

On rappelle que le champ de vecteur $\vec{V}(M)$ dérive d'un potentiel scalaire $\Phi(M)$ si et seulement si $\vec{V}(M) = -\text{grad}\Phi(M)$ ou encore si et seulement si $\vec{V}(M) \cdot d\vec{OM}$ est une forme différentielle exacte à savoir $-d\Phi(M)$.

1) Déterminer $\varphi(x, y, z)$ pour que $\vec{V}(M)$ dérive d'un potentiel scalaire $\Phi(M)$.

2) En déduire $\varphi(x, y, z)$ sachant que $\varphi(x, 0, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer le potentiel scalaire Φ correspondant.

$$e^x dx + x e^x dy = \frac{1}{e^x} (x^2 dy + (xy) (x dy + y d))$$

11:050N

Contrôle de Mathématiques pour la Physique¹

Durée : 2 heures

N.B : Aucun document n'est autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1 (5 points)

- 1°) Donner l'expression de l'élément de volume dV en coordonnées sphériques. $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$
- 2°) En déduire le volume V d'une boule de rayon R . $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- 3°) En déduire également l'élément d'air dS sur une sphère de rayon R et l'aire S de cette sphère. $S = 4\pi R^2$

Exercice 2 (5 points)

Soient P, Q deux fonctions définies par : $P(x, y) = x + y$; $Q(x, y) = x - y$.

- 1°) Définir une forme différentielle exacte.
- 2) Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$; montrer que ω est une forme différentielle exacte.
- 3°) Déterminer f une fonction telle que $df = \omega$.

Exercice 3 QCM (10 points)

1°) En coordonnées sphériques, le lieu des points tels que $r = \text{cste}$ est

- a. une sphère ☒ b. un cercle ☐ c. un cylindre ☐

2°) En coordonnées cylindriques, le lieu des points tels que $\rho = \text{cste}$ est

- a. un cylindre ☒ b. un cercle ☐ c. une sphère ☐

3°) Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ est

- a. $-\frac{\vec{r}}{r^3}$ ☒ b. $\frac{\vec{r}}{r^3}$ ☐ c. $-\frac{\vec{r}}{r}$ ☐

4°) Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\text{grad}(r)$ est

- a. $\frac{\vec{r}}{r}$ ☒ b. $-\frac{\vec{r}}{r^3}$ ☐ c. $-\frac{\vec{r}}{r}$ ☐

5°) En un point, le gradient d'un champ scalaire est

- a. perpendiculaire aux surfaces de niveaux ☐ b. parallèle aux surfaces de niveaux ☐
c. nul dans le sens des valeurs décroissant du champ ☒

6°) La différentielle de $\ln|x|$ est

- a. $\frac{1}{x} dx$ ☐ b. dx/x ☒ c. dx ☐

7°) Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables, l'égalité $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$

- a. est réalisée pour certaines fonctions ☐ b. est toujours réalisée ☒ c. n'est jamais réalisée ☐

8°) f est une fonction strictement négative. Peut-on calculer df par la méthode des logarithmes

- a. Non ☐ b. Oui ☒ c. Elle n'a pas de différentielle ☐

9°) Un ensemble de vecteurs

- a. définit toujours un champ de vecteur ☐ b. peut définir un champ de vecteurs ☒
c. ne définit pas un champ de vecteurs ☐

10°) Quelles sont la ou les affirmations correctes ?

- a. La différentielle est équivalente à la dérivée ☒
b. La valeur de la différentielle est une valeur approchée de la dérivée ☐
c. La valeur de la différentielle est une valeur approchée de la variation de la fonction ☐

11) Quelles sont la ou les affirmations correctes ?

a : La différentielle est équivalente à la dérivée ☒
 b : La valeur de la différentielle est une valeur approché de la variation de la fonction ☒
 c : La valeur de la différentielle est une valeur approchée de la dérivée ☒

b : La valeur de la différentielle est une valeur approchée de la dérivée ☒

12) En coordonnée sphérique, l'équation d'un cylindre d'axe Oz et de rayon 1 est

a : $r^2 \cos^2 \varphi = 1$ ☐

b : $r \sin \theta = 1$ ☒

c : $r^2 (\cos^2 \varphi + \sin \theta) = 1$ ☐

13) L'ensemble des points de l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ vérifiant $\ln(x^2 + y^2) = \text{cste}$ est

a : un cercle ☐

b : un cylindre ☒

c : une sphère ☒

14) L'ensemble des points de l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ vérifiant $\ln(x^2 + y^2 + z^2) = 2$ est

a : un cercle ☐

b : une sphère ☒

c : un cylindre ☒

15) Pour que deux vecteurs aient leur produit scalaire nul, il suffit

a : qu'ils soient parallèles ☐

b : qu'ils soient orthogonaux ☒

c : que l'un au moins soit nul ☒

16) On considère une fonction de trois variables, continue, ainsi que toute ses dérivées. Combien possède-t-elle de dérivées quatrième différentes ?

a : 15 ☐

b : 81 ☒

c : 27 ☐

17) Si on compare la valeur de la différentielle à celle de la variation d'une fonction,

a : La différentielle est toujours plus petite ☐

b : On ne peut pas conclure ☒

c : La différentielle est toujours plus grande ☐

18) $\omega = 2xydz + x^2dy$

a : est une différentielle totale ☒
 b : est une forme différentielle ☒
 c : n'est pas une forme différentielle ☐

b : est une forme différentielle ☒

c : n'est pas

19) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$

a : n'a pas de signification ☒
 b : est la dérivée première de $f(x)$ ☒
 c : est la dérivée seconde de $f(x)$ ☐

b : est la dérivée première de $f(x)$ ☒

c : est la dérivée

20) En coordonnées polaires, on repère deux points $M_1(r_1, \varphi_1)$ et $M_2(r_2, \varphi_2)$. quelles conditions doivent vérifier φ_1 et φ_2 pour que $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2} = 0$?

a : $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$ ☐

b : $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$ ☒

c : $\varphi_1 = -\varphi_2 \pm \pi$ ☐

Bon courage

Contrôle de Mathématiques pour la Physique¹

Durée : 2 heures

N.B : Aucun document n'est autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1 (5 points)

Une intégrale qui intervient pour le calcul du moment d'inertie d'une plaque semi-circulaire homogène par rapport au diamètre qui constitue d'un de ses bords est, si ce diamètre est pris comme axe, Oy, Ox étant l'axe de symétrie de la plaque :

$$I = \iint_{D(x,y)} f(x,y) dx dy \quad \text{avec } D(x,y) = \{x, x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0\}$$

- 1) Montrer que en utilisant les coordonnées cartésiennes que $I = \frac{R^4}{3} \int_{-R}^R R(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy$.
- 2) En posant $y = R \sin \varphi$, calculer I .

Exercice 2 (5 points)

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions f et g en spécifiant le domaine de définition D :

a $f(x,y) = y^2 \ln x$,

b) $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

QCM (10 points)

1) On considère une fonction de trois variables, continue, ainsi que toute ses dérivées. Combien possède-t-elle de dérivées quatrième ?

- a : 15 ☐ b : 81 ☒ c : 27 ☐

2) Si on compare la valeur de la différentielle à celle de la variation d'une fonction,

- a : La différentielle est toujours plus petite ☐ b : On ne peut pas conclure ☒ c : La différentielle est toujours plus grande ☐

3) $\omega = 2xydx + x^2dy$

- a : est une différentielle totale ☐ b : est une forme différentielle ☒ c : n'est pas une forme différentielle ☐

4) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$

- a : n'a pas de signification ☐ b : est la dérivée première de $f(x)$ ☒ c : est la dérivée seconde de $f(x)$ ☐

5) En coordonnées polaires, on repère deux points $M_1(r_1, \varphi_1)$ et $M_2(r_2, \varphi_2)$. quelles conditions doivent vérifier φ_1 et φ_2 pour que $\vec{OM}_1 \wedge \vec{OM}_2 = 0$?

- a : $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \frac{\pi}{2}$ ☐ b : $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$ ☐ c : $\varphi_1 = -\varphi_2 \pm \pi$ ☒

6) Les deux notations $\text{grad} f$ et ∇f

- a : sont équivalentes ☒ b : n'ont aucun rapport entre elles ☐ c : expriment le même opérateur ☐

7) En coordonnée sphérique, le lieu des points tels que $r = \text{cte}$ est

- a : une sphère ☒ b : un cercle ☒ c : un cylindre ☐

8) En coordonnée cylindrique, le lieu des points tels que $\rho = \text{cte}$ est

- a : un cylindre ☒ b : un cercle ☐ c : une sphère ☐

9) Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\text{grad}(\frac{1}{r})$ est

- a : $-\frac{\vec{r}}{r^3}$ ☒ b : $\frac{\vec{r}}{r}$ ☐ c : $-\frac{\vec{r}}{r}$ ☐

10) Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\text{grad}(r)$ est

- a : $\frac{\vec{r}}{r}$ ☒ b : $-\frac{\vec{r}}{r^3}$ ☐ c : $-\frac{\vec{r}}{r}$ ☐

Session de rattrapage de Mathématiques pour la physique

Durée: 2h

Exercice 1: (10pts)

Dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{v}(3, 0, -1)$, $\vec{u}(2, 2, 1)$, $\vec{w}(1, -3, -5)$.

1. Calculer la norme de ces vecteurs.
2. Calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
3. Calculer le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
4. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{n}$ porté par le vecteur $\vec{c} = \vec{u} + 2\vec{v}$.

Exercice 2: (Température à la surface des planètes) (10pts)

La température T_T à la surface de la Terre est reliée à la température de la surface du soleil T_S par une relation de la forme :

$$T_T^4 = K \frac{T_S^4}{D^2}$$

où K est une constante et D la distance Terre-Soleil (la loi en T^4 , T à la puissance 4, s'appelle loi du corps noir). $T_T = 300K$ (ici K =Kelvin), $T_S = 6000K$ et $D = 150$ millions de km .

1. De combien faut-il déplacer la Terre pour faire varier sa température de $1^\circ C$? Que peut-on prévoir sur Mars ($D = 220$ millions de km) et sur Vénus ($D = 108$ millions de km) (à exprimer en Kelvin)?
2. De combien T_S varie-t-elle quand T_T varie de $1^\circ C$?

« Bonne inspiration »

Rattrapage de mathématiques pour la physique

Durée : 01 heure 30 minutes

Exercice 1 (6 points=(1+1+(1+1+2))points)

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On donne les points $A(0; 3; 6)$, $B(2,5; 0; 3)$ et $C(0; 7; 0)$.

- 1) Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
- 2) Calculer en degrés l'angle $\widehat{BAC}$ à 10^{-2} près.
- 3) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par les points A, B et C.
 - 3.1) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$.
 - 3.2) Quelle est la distance d de l'origine du repère au plan $\mathcal{P}$?
 - 3.3) Quelles sont les coordonnées des points D et E, intersections respectives du plan $\mathcal{P}$ et des droites $(O, \vec{e}_3)$ et $(O, \vec{e}_1)$?

Exercice 2 (8 points =(2+2+2+2) points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les trois vecteurs liés $(A, \vec{u})$, $(B, \vec{v})$ et $(C, \vec{w})$ avec $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(3, 0, 2)$ et $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(1, -1, 0)$ et $\vec{w}(-2, -3, 1)$.

- 1) Calculer les coordonnées de l'isobarycentre G des trois points.
- 2) Calculer les moments par rapport à O des trois vecteurs liés.
- 3) Calculer la résultante générale $\vec{R}$ des trois vecteurs et le moment résultant en O.
- 4) Soit le vecteur $\vec{a}(1+m, -1, 0)$. Trouver m tel que les deux droites de support $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{a})$ soient concourantes et calculer les coordonnées du point d'intersection I .

Exercice 3 (3 points)

Soit une fonction vectorielle $\vec{u}(\alpha, \beta)$ de norme constante; montrer que, quels que soient α et β , les dérivées $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta}$ sont orthogonales à $\vec{u}$.

Exercice 4 (3 points)

La loi des gaz relative à une masse fixée m d'un gaz parfait à température absolue T , pression P et volume V s'écrit $PV = mRT$, où R est la constante du gaz. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$.